7. Жукова Н.И. *Минимальные множества картановых слоений* // Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова. – 2007. – Т. 256. – С. 115–147.

8. Жукова Н.И. *Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 93. – № 6. – С. 944–946.

9. Zhukova N. *On the stability of leaves of Riemannian foliation* // Ann. Global Anal. and Geom. – 1987. – V. 5. – N. 3. – P. 261–271.

TRANSVERSELY ANALYTICAL LORENTZIAN FOLIATIONS OF CODIMENSION TWO WITH EHRESMANN CONNECTION ON N-DIMENSIONAL MANIFOLDS

A.V. Bagaev, N.I. Zhukova

We prove a criterion for Lorentzian foliations of codimension two with Ehresmann connection to be Riemannian. A description of the structure of transverse analytic non-Riemannian Lorentzian foliations of codimension two is given.

Keywords: Lorentzian foliation, Ehresmann connection, the germ holonomy group of a leaf.

УДК 514.76

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ С МАЛЫМИ ТИПОВЫМИ ЧИСЛАМИ В АК-МНОГООБРАЗИЯХ

М.Б. Банару[1]

1 *mihail.banaru@yahoo.com*; Смоленский государственный университет

Доказано, что в АК-многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом 1 и на гиперповерхности с типовым числом 0 являются идентичными.

Ключевые слова: Почти контактная метрическая структура, типовое число, гиперповерхность, АК-многообразие.

1. Почти эрмитовы и почти контактные метрические структуры относятся к числу важнейших дифференциальногеометрических структур. Давно известно о такой связи между ними: на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Изучением почти контактных метрических структур на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий занимались многие известные геометры: Д. Блэр (США), С. Ишихара, М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, К. Яно (Япония), В.Ф. Кириченко, Л.В. Степанова (Россия).

Как известно [1], почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX,\ JY\rangle=\langle X,\ Y\rangle,\quad X,Y\in\aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n})$$

и называемого фундаментальной (или келеровой) формой структуры.

Пусть $(M^{2n},\ \{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\})$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p,\ g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом:

$$(p,\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n,\ \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры в комплексификации касательного пространства, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a} = a + n$.

Почти эрмитова структура принадлежит классу почти келеровых (almost Kählerian, AK-) структур, если выполняется условие $\delta F = 0$, где δ — оператор кодифференцирования [1]. Почти эрмитово многообразие называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти комплексная структура интегрируема, и келеровым, если к тому же $\nabla F = 0$.

Напомним также что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются следующие условия [1]:

$$\eta(\xi) = 1;\ \Phi(\xi) = 0;\ \eta \circ \Phi = 0;\ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \aleph(N).$$

(Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.)

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Классическими примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая и слабо косимплектические структуры, а также структуры Сасаки и Кенмоцу. В настоящее время они интенсивно исследуются как с точки зрения дифференциальной геометрии, так и с точки зрения теоретической физики.

Наконец, напомним, что типовым числом гиперповерхности риманова многообразия называют ранг ее второй квадратичной формы.

2. В работе автора [2] было доказано, что если почти эрмитово многообразие является келеровым, а типовое число его гиперповерхности равно нулю или единице, то почти контактная метрическая структура на такой гиперповерхности будет косимплектической. В [3] аналогичный результат получен для почти контактной метрической структуры на гиперповерхности приближенно келерова многообразия (или W_1-многообразия, используя терминологию Грея–Хервеллы). Доказано, что почти контактные метрические структуры на 0- и на 1-гиперповерхностях приближенно келерова многообразия тоже идентичны (а именно являются слабо косимплектическими структурами). В данной работе будет показано, что на 0- и на 1-гиперповерхностях АК-многообразия индуцируются также одинаковые почти контактные метрические структуры.

Теорема 1. *Структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} АК-многообразия M^{2n} имеют следующий вид:*

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+B^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}\wedge\omega_{\gamma}+i\sigma^{\alpha}_{\beta}\omega^{b}\wedge\omega+\left(-\sqrt{2}\tilde{B}^{n\alpha\beta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n}+i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_{\beta}\wedge\omega;$$

$$d\omega_{\alpha}=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}+B_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}-i\sigma^{\beta}_{\alpha}\omega_{b}\wedge\omega+\left(-\sqrt{2}\tilde{B}_{n\alpha\beta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n}-i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^{\beta}\wedge\omega;$$

$$\begin{aligned}d\omega={}&\sqrt{2}B_{n\alpha\beta}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}+\\&+\sqrt{2}B^{n\alpha\beta}\omega_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}-2i\sigma^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}\wedge\omega_{\alpha}+\left(\tilde{B}_{n\beta n}+i\sigma_{n\beta}\right)\omega\wedge\omega^{\beta}+\left(\tilde{B}^{n\beta n}-i\sigma^{\beta}_{n}\right)\omega\wedge\omega_{\beta}.\end{aligned}$$

Здесь $\{\omega^{\alpha}\}$, $\{\omega_{\alpha}\}$ — компоненты форм смещения ($\omega^{n}=\omega$), $\{\omega^{k}_{j}\}$ — компоненты форм римановой связности; через $\{J^{j}_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J. Отметим, что системы функций $\{B^{ab}{}_{c}\}$ и $\{B_{ab}{}^{c}\}$ служат компонентами тензоров Кириченко [4] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь и далее $\alpha,\beta,\gamma=1,\ldots,n-1$; $a,b,c=1,\ldots,n$; $\hat{a}=a+n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в АК-многообразие M^{2n}.

Равенство нулю или единице типового числа гиперповерхности приводит к тому, что матрица ее второй квадратичной формы принимает следующий вид [4]:

$$\left(\sigma_{ps}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c}\mathbf{0} & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & \mathbf{0}\\ \hline 0\ldots0 & \sigma_{nn} & 0\ldots0\\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & \mathbf{0}\end{array}\right),\ p,s=1,\ldots,2n-1,$$

причем если типовое число равно нулю, то матрица, очевидно, будет нулевой. Поэтому мы можем переписать структурные уравнения Картана в следующем виде:

$$\begin{gathered}d\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+B^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta}\wedge\omega_{\gamma}+\left(-\sqrt{2}\tilde{B}^{n\alpha\beta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n}\right)\omega_{\beta}\wedge\omega;\\ d\omega_{\alpha}=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}+B_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}+\left(-\sqrt{2}\,\tilde{B}_{n\alpha\beta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n}\right)\omega^{\beta}\wedge\omega;\qquad(1)\\ d\omega=\sqrt{2}\,B_{n\alpha\beta}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}+\sqrt{2}B^{n\alpha\beta}\omega_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}+\left(\tilde{B}_{n\beta n}\right)\omega\wedge\omega^{\beta}+\left(\tilde{B}^{n\beta n}\right)\omega\wedge\omega_{\beta}.\end{gathered}$$

Уравнения (1) зависят только от тензоров Кириченко, то есть только от АН-структуры на многообразии M^{2n}, и никак не зависят от того, обращается в нуль или нет компонента σ_{nn}. Иначе, почти контактная метрическая структура на 1-гиперповерхности в почти келеровом многообразии M^{2n} идентична почти контактной метрической структуре на вполне геодезической гиперповерхности в M^{2n}. Таким образом, получаем наш основной результат.

Теорема 2. *В АК-многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числами 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.*

Литература

1. Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* – Одесса: Печатный дом, 2013.

2. Банару М. Б. *О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий* // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55. – №4. – С. 719–723.

3. Банару М. Б. *Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях* // Вестник Московского университета. Сер.1. Математика. Механика. – 2014. – №3, – С. 60–62.

4. Кириченко В. Ф., Банару М. Б., *Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2014. – Т. 127. – С. 5–40.

ON ALMOST CONTACT METRIC HYPERSURFACES WITH SMALL TYPE NUMBERS IN AK-MANIFOLDS

M.B. Banaru

It is proved that in an AK-manifold, the almost contact metric structures on a hypersurface with type number 1 and on a hypersurface with type number 0 are identical.

Keywords: almost contact metric structure, type number, hypersurface, AK-manifold.

УДК 514.75

ОБ АНАЛОГЕ СВЯЗНОСТИ НЕЙФЕЛЬДА В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

О.О. Белова[1]

1 *olgaobelova@mail.ru*; Балтийский федеральный университет имени И. Канта

В многомерном проективном пространстве рассмотрено пространство центрированных плоскостей. Рассмотрены два случая задания аналога связности Нейфельда в главном расслоении. Доказано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует данную связность.

Ключевые слова: Проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, нормализация Нордена, связность Нейфельда.